U mehanici, u slučaju potencijalnih sila koje dejstvuju na jednu česticu ova sila se može izraziti u obliku gradijenta $\mathbf{F} = -gradU$, čime se problem određivanja ovakvih sila iz poznatog kretanja čestica može svesti na nalaženje odgovarajućeg potencijala U. Na sličan način i u elektrodinamici možemo problem određivanja jačina električnog i magnetnog polja svesti na problem određivanja izvesnih potencijala. Iz matematičkog oblika Kulonovog zakona[1] vidi se da je Kulonova interakcija *potencijalna*, da *potencijalna energija* interakcije posmatranog para nepokretnih naelektrisanih čestica iznosi

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \tag{1}$$

kao i da se može pisati:

$$\mathbf{F}_{12} = -grad_{\mathbf{r}_1} W, \ \mathbf{F}_{21} = -grad_{\mathbf{r}_2} W, \tag{2}$$

pri čemu indeks uz oznaku gradijenta ukazuje vektor položaja one čestice po čijim koordinatama se vrši diferenciranje kod obrazovanja gradijenta (tzv. parcijalni gradijent). Količnici $\mathbf{F}_{21}/q_2$ i $\mathbf{F}_{12}/q_1$ očevidno predstavljaju jačine električnih polja čestica 1 i 2 respektivno, na mestu nalaženja one druge čestice. Za jačinu elektrostatičkog polja generisanog nepokretnom česticom se tako nalazi sledeći opšti rezultat:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{3}$$

u kome $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ označavaju vektore položaja tačaka prostora u kojima se, respektivno, posmatra polje (tzv. *tačka polja*) i nalazi čestica (tzv. *tačka izvora*).

Pri analizi statičkih polja uveli smo skalarni i vektorski potencijal ϕ i $\mathbf{A}$ respektivno. Međutim, na osnovu bezizvornih Maksvelovih jednačina nožemo uvesti skalarni i vektorski potencijal za proizvoljno elektromagnetno polje.

[1] Kulonov zakon: $\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$; $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Ovde su $\mathbf{F}_{12}$ i $\mathbf{F}_{21}$ sile koje deluju, respektivno, na čestice sa indeksom 1 i 2 usled interakcije sa drugom od tih čestica, $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ su njihovi vektori položaja, a q_1 i q_2 su naelektrisanja; ε_0 je tzv. *električna konstanta* ($1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \, \mathrm{m/F}$).

1. Potencijali elektromagnetnog polja u vakuumu

Pođimo od druge i treće Maxwellove jednačine

$$div\mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{5}$$

Pošto je divergencija rotora ma kog vektora identički jednaka nuli tj. $divrot \equiv 0$, iz prve jednačine vidimo da se veličina $\mathbf{B}$ može izraziti kao rotor izvesnog vektora $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = rot\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{6}$$

Zamenimo $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ u treću Maksvelovu jednačinu, imamo i izmenimo red operacija izračunavanja rotora i diferenciranja po vremenu

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{A} = -rot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{7}$$

odnosno

$$rot\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{8}$$

Pošto je rotor gradijenta ma kog skalara identički jednak nuli, veličine $\mathbf{E}$ i $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ mogu se razlikovati za gradijent nekog skalara $-\phi$, pa je

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{9}$$

Tako uvedena veličina $\mathbf{A}$ naziva se *vektorski potencijal*, a veličina ϕ *skalarni potencijal* elektromagnetnog polja. Dakle, jačinu električnog polja i magnetnu indukciju možemo izraziti preko potencijala ϕ i $\mathbf{A}$ prema

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \tag{10}$$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}. \tag{11}$$

Potencijali su funkcije vektora položaja i vremena. Šest funkcija $E_x,...,B_z$ koje opisuju elektromagnetno polje zamenjujemo sa četiri funkcije ϕ, A_x, A_y i A_z. Broj komponenti potencijala je za dva manji nego broj komponenti polja.

Da bi sagledali fizički smisao skalarnog potencijala, pretpostavimo da je elektromagnetno polje stacionarno, tj. da se polje ne menja u toku vremena. Tada je $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$, te se obrazac (10) svodi na

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

pa skalarnim množenjem sa elementom puta $d\mathbf{r}$ dobijamo

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\phi}{\partial y}dy - \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = -d\phi\,,$$

a otuda

$$\phi_{(M)} = -\int_{M_0}^{M}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}\,. \tag{12}$$

Prema tome, <u>*u slučaju stacionarnog elektromagnetnog polja*</u> *skalarni potencijal predstavlja rad koji treba izvršiti protiv električnog polja da bi se jedinično naelektrisanje dovelo iz tačke u kojoj se uzima da je potencijal nula u posmatranu tačku.* Međutim, u slučaju promenljivog elektromagnetnog polja ovaj zaključak ne važi.

Sam vektorski potencijal nema neposredni fizički smisao, dok njegov linijski integral ima. Uočimo stoga integral $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ po ma kakvoj zatvorenoj konturi i transformišimo ga pomoću Stoksove teoreme u odgovarajući površinski integral

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S rot\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}\,, \tag{13}$$

pa u njemu prema obrascu (11) stavimo $rot\mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\,. \tag{14}$$

odavde vidimo da je *cirkulacija vektorskog potencijala po ma kakvoj zatvorenoj konturi jednaka magnetnom fluksu kroz ma koju površ oivičenu tom konturom,* što važi bez ikakvog ograničenja.

2. Kalibraciona invarijantnost

Postavlja se pitanje da li su pri datim vrednostima jačina električnog i magnetnog polja elektromagnetni potencijali jednoznačno određeni. Već iz samih obrazaca (6) i (9) vidimo da se oni javljaju samo u obliku svojih izvoda, te su određeni samo sa tačnošću do izraza koji se skraćuju pri operacijama u navedenim obrascima.

Neka su ϕ i $\mathbf{A}$ prvobitni (polazni[2]) elektromagnetni potencijali koji određuju posmarano elektromagnetno polje. Uvedimo nove potencijale ϕ' i $\mathbf{A}'$ smenom

$$\phi' = \phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,,\quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Lambda\,, \tag{15}$$

[2] U nekim knjigama iz elektrodinamike se prvobitni potencijali označavaju sa ϕ_0 i $\mathbf{A}_0$, dok se novi potencijali označavaju sa ϕ i $\mathbf{A}$.

gde je proizvoljna funkcija položaja i vremena tj. $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, t)$. Novi potencijali opisuju isto elektromagnetno polje kao i polazni potencijali ϕ i $\mathbf{A}$. Prema obrascima (6) i (9) ovo se lako proverava:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} - \nabla \Lambda) - \nabla(\phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}) \\ &= \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \Lambda - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \Lambda \\ &= \mathbf{E}\end{aligned} \quad , \tag{16}$$

$$\mathbf{B}' = rot(\mathbf{A} - \nabla \Lambda) = rot\mathbf{A} - rot\nabla \Lambda = rot\mathbf{A} = \mathbf{B}, \tag{17}$$

pošto je $rot\, grad\ f \equiv 0$.

Odavde vidimo da se navedenom transformacijom potencijala dobijaju takve veličine ϕ' i $\mathbf{A}'$ koje stoje u istom odnosu prema $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ kao i potencijali ϕ i $\mathbf{A}$, te i ovako uvedene veličine ϕ' i $\mathbf{A}'$ predstavljaju *elektromagnetne potencijale istog elektromagnetnog polja.* Jačina električnog polja i magnetna indukcija su invarijantne na kalibracione transformacije. Polja su opservabilne veličine, pa zaključujemo da je elektrodinamika kalibraciono invarijantna teorija.

Na osnovu toga možemo zaključiti da su potencijali nejednoznačni, tj. *elektromagnetni potencijali su određeni samo do transformacija (15), gde je Λ ma kakva funkcija položaja i vremena.* To znači da sa potencijala ($\phi, \mathbf{A}$) uvek možemo preći gore navedenom smenom na nove potencijale (ϕ', $\mathbf{A}'$), koji su *fizički ekvivalentni prvim*, pri čemu je funkcija $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ sasvim proizvoljna i može se izabrati tako kako nam je najpogodnije.

Ova osobina elektromagnetnih potencijala, tj. njihova određenost samo do transformacija (15) naziva se *kalibraciona* ili *gradijentna invarijantnost*, a same transformacije (15) *kalibracione transfromacije.* Iz gornjega se vidi da su skalarni i vektorski potencijal samo pomoćne veličine i da *navedeni fizički smisao imaju samo jačina električnog polja i magnetna indukcija*, pri čemu sve jednačine elektrodinamike moraju ostati invarijantne pri ma kakvim transformacijama elektromagnetnih potencijala navedenog oblika.

Stoga je moguće nametnuti neki uslov na potencijale, tj. fiksirati kalibraciju. Najčećsce se koriste Lorencov i Kulonov kalibracioni uslov.

Lorencov kalibracioni uslov je

$$div\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\,, \tag{18}$$

a Kulonov kalibracioni uslov je dat sa

$$div\mathbf{A} = 0\ . \tag{19}$$

3. Jednačine za elektromagnetne potencijale

Odredimo sad elektromagnetne potencijale tako da budu zadovoljene i preostale dve Maksvelove jednačine (prva i četvrta)

$$div\mathbf{D} = \rho, \quad rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{20}$$

i pretpostavimo da je posmatrana sredina _izotropna i bez disperzije_ i da su polja *slaba i niskofrekventna*, tako da važe materijalne jednačine

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{21}$$

Tada druga jednačina (20) dobija oblik

$$rot\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}) \tag{22}$$

ili eksplicitno, ako pretpostavimo da se karakteristike sredine ne menjaju u toku vremena (takođe je potrebno znati transformaciju za rotor proizvoda sklara i vektora[3]):

$$\frac{1}{\mu} rot\mathbf{B} + grad\,\frac{1}{\mu} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{23}$$

Stavimo li u ovu jednačinu umesto $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ izraze (21) za prvobitne elektromagnetne potencijale ϕ i $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ i $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\phi$ imamo:

$$rot\,rot\mathbf{A} + \mu\,grad\,\frac{1}{\mu} \times rot\mathbf{A} = \mu\,\mathbf{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\,\phi\right) \tag{24}$$

odnosno, razvijajući $rot\,rot\mathbf{A}$[4] i menjajući redosled operacija $\partial/\partial t$ i $grad$

$$\begin{aligned} grad\,div\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} + \mu\,grad\,\frac{1}{\mu} \times rot\mathbf{A} &= \mu\,\mathbf{j} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ -grad\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &+ \frac{\partial\phi}{\partial t} grad\,(\varepsilon\mu) \end{aligned},$$

pa grupišući srodne članove dolazimo do

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\,grad\,\frac{1}{\mu} \times rot\mathbf{A} - grad\left(div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t} grad\,(\varepsilon\mu) = -\mu\,\mathbf{j} \tag{25}$$

Pređimo sada sa potencijala $(\phi, \mathbf{A})$ na nove potencijale $(\phi', \mathbf{A}')$ transformacijom (15). Pošto prethodna jednačina predstavlja ustvari četvrtu Maksvelovu jednačinu, njen oblik pri ovoj transformaciji mora ostati invarijantan

---

[3] $rot(\Phi\mathbf{A}) = \Phi\,rot\mathbf{B} - \mathbf{B} \times grad\,\Phi$

[4] $rot\,rot\mathbf{A} = grad\,div\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$

$$\Delta\mathbf{A}' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2} - \mu\, grad\,\frac{1}{\mu}\times rot\mathbf{A}' - grad\left(div\mathbf{A}' + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right) + \frac{\partial\phi'}{\partial t}grad\left(\varepsilon\mu\right) = -\mu\,\mathbf{j}. \quad (26)$$

Pri tome izraz u zagradi jednačine (25) prelazi u

$$div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} = div(\mathbf{A}' + \nabla\Lambda) + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}(\phi' - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}) = div\mathbf{A}' + div\,grad\,\Lambda + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right),$$
$$= div\mathbf{A}' + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}$$

a da bismo iprostili jednačinu (26), izaberimo proizvoljnu funkciju $\Lambda(\mathbf{r},t)$ tako da bude

$$\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = div\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (27)$$

čime se prthodna relacija svodi na

$$div\mathbf{A}' + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0. \quad (28)$$

Ovaj uslov, koji smo dobili navedenim pogodnim izborom funkcije $\Lambda(\mathbf{r},t)$ daje nam vezu između skalarnog i vektorskog potencijala i naziva se *Lorencov uslov.* U tom slučaju izraz u zagradi ujednačini (26) otpada, te ona dobija znatno uprošćen oblik

$$\Delta\mathbf{A}' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2} - \mu\, grad\,\frac{1}{\mu}\times rot\mathbf{A}' + \frac{\partial\phi'}{\partial t}grad\left(\varepsilon\mu\right) = -\mu\,\mathbf{j}. \quad (29)$$

To je *prva diferncijalna jednačina elektromagnetnih potencijala za izotropne sredine*, međutim u njoj pored vektorskog figuriše i skalarni potencijal, koji smo samo delimično eliminisali Lorencovim uslovom.

Nađimo sad i drugu jednačinu koju moraju zadovoljavati elektromagnetni potencijali. U tom cilju iskoristimo prvu jednačinu (20), $div\mathbf{D} = div\left(\varepsilon\mathbf{E}\right) = \rho$, i razvijmo levu stranu[5]

$$\varepsilon\, div\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot grad\,\varepsilon = \rho. \quad (30)$$

Stavimo ovde umesto $\mathbf{E}$ izraz (9) za prvobitne elektromagnetne potencijale ϕ i $\mathbf{A}$

$$div\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - grad\,\phi\right) + \frac{1}{\varepsilon}grad\,\varepsilon\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - grad\,\phi\right) = \frac{1}{\varepsilon}\rho,$$

što možemo napisati, posle izmene redosleda operacija div i $\partial/\partial t$, u obliku

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}div\mathbf{A} + \frac{1}{\varepsilon}grad\,\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + grad\,\phi\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho. \quad (31)$$

[5] $div\left(\Phi\mathbf{A}\right) = \Phi div\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot grad\Phi$

Ako izvršimo transformaciju potencijala (15), pošto je gornja jednačina ustvari prva Maksvelova jednačina, i njen oblik pri tome mora ostati invarijantan

$$\Delta\varphi' + \frac{\partial}{\partial t} div\mathbf{A}' + \frac{1}{\varepsilon} grad\,\varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + grad\,\phi' \right) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho\,. \tag{32}$$

Zamenimo li u ovoj jednačini $div\mathbf{A}$ prema Lorentzovom uslovu (28), dobićemo

$$\Delta\phi' + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\mu \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) + \frac{1}{\varepsilon} grad\,\varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + grad\,\phi' \right) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

odnosno

$$\Delta\phi' - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} grad\,\varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + grad\,\phi' \right) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \tag{33}$$

i to je *druga diferencijalna jednačina elektromagnetnih potencijala za izotropne sredine.* Međutim, u ovoj jednačini pored skalarnog figuriše i vektorski potencijal, tako da navedene jednačine predstavljaju sistem simultanih parcijalnih diferencijalnih jednačina vrlo složenog oblika, što znatno otežava njihovo rešavanje.

Napomenimo još da i u slučaju kad materijalne jednačine imaju složeniji oblik, na pr. u vidu integralnih relacija, mogu se formulisati jednačine za elektromagnetne potencijale, ali one će tada imati oblik integro-diferencijalnih jednačina.

4. Određivanje elektromagnetnog polja pomoću potencijala

Elektromagnetno polje je određeno ako znamo skalarni i vektorski potencijal, koji zadovoljavaju diferencijalne jednačine (29) i (33). Stoga skalarni i tri komponente vektorskog potencijala možemo smatrati *nezavisnim funkcijama polja*, tj. funkcijama koje potpuno određuju elektromagnetno polje i koje odgovaraju generalisanim koordinatama u mehanici sistema. Na taj način *određivanje elektromagnetnog polja svdeneo je na nalaženje elektromagnetnih potencijala rešavanjem navedenih diferencijalnih jednačina, a jačine električnog i magnetnog polja dobijaju se potom operacijama diferenciranja.*

Ako je posmatrana materijalna redina *homogena, izotropna i bez disperzije,* kad je $\varepsilon = const$ i $\mu = const$, jednačine (29) i (33) se znatno uprošćavaju, jer tada otpadaju treći i četvrti član u prvoj jednačini kao i treći član u drugoj. Time ove jednačine dobijaju znatno jednostavniji oblik

$$\Delta \mathbf{A}' - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{j}, \tag{34}$$

$$\Delta \phi' - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho, \tag{35}$$

tako da u prvoj jednačini figuriše samo vektorski, a u drugoj samo skalarni potencijal. Prema tome, *u slučaju homogene sredine diferencijalne jednačine elektromagnetnih potencijala razdvajaju se na dve nezavisne, za skalarni odnosno vektorski potencijal, pri čemu obe ove diferencijalne jednačine čak su i istog matematičkog oblika*

$$\Delta \psi - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\chi(\mathbf{r}, t)\,. \tag{36}$$

Ova parcijalna diferencijalna jednačina poznata je pod imenom *d'Almbertova jednačina* i njeno najopštije rešenje može se dobiti tzv. Grinovim metodom u integralnom obliku. Kasnije ćemo naći takvo rešenje u nekim specijalnim slučajevima, koji će nam biti od posebnog interesa za rešavanje izvesnih problema elektrodinamike.

Na osnovu dobijenih jednačina elektromagnetno polje za homogene i izotropne sredine bez disperzije može se odrediti na sledeđi način. Ako zanmo raspodelu slobodnih naelektrisanja i struja, tj. funkcije $\rho(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ kao i dielektričnu konstantu ε i magnetnu peremeabilnost μ, treba rešiti diferencijalne jednačine elektromagnetnih potencijala (34 i 35) uz date početne i granične uslove. Tako dobijamo *skalarni i vektorski potencijal* kao funkcije položaja i vremena

$$\phi'(\mathbf{r}, t),\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)\,. \tag{37}$$

Pomoću jednačina $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ i $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$ mogu se tada naći i *jačine električnog i magnetnog polja,* čime je problem rešen.

Ispitajmo još ponašanje elektromagnetnih potencijala pri promeni znaka koordinata i vremena. Imajući u vidu da pri zameni x, y, z sa $-x, -y, -z$ vektor $\mathbf{E}$ menja znak, a $\mathbf{B}$ ga ne menja, i da gradijent i rotor manjaju znak, iz formula $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ i $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\,\phi$ vidimo da pri tome ϕ ne menja znak, a $\mathbf{A}$ ga menja, tj. *skalarni potencijal je pravi skalar, a vektorski potencijal pravi vektor.* Pošto je i ρ pravi scalar, a $\mathbf{j}$ pravi vector, *jednačine elektromagnetnih potencijala ostaju invarijantne pri promeni znaka koordinata,* kao i same Maxwellove jednačine. Što se tiče njihovog ponašanja pri zameni t sa $-t$, vector $\mathbf{E}$ pri tome ne menja znak, a $\mathbf{B}$ ga menja, a pošto ϕ i ρ takođe ne menjaju znak, a $\mathbf{A}$ i $\mathbf{j}$ ga menjaju, *jednačine elektromagnetnih potencijala su invarijantne i prema promeni znaka vremena.*